Ein Beitrag zur Auflösung der Gleichungen des 4. Grades

von

Professor Otto Herweg.

Beilage zum Programm des Königlichen Gymnasiums zu Neustadt Westpr.

Ostern 1903.

Neustadt Wpr.
Druck von H. Brandenburg
1903.

Prog. No. 40.

Ein Beitrag zur Auflösung der Gleichungen des 4. Grades.

0. Vor geraumer Zeit mit einer Aufgabe aus der analytischen Mechanik mich beschäftigend, stiess ich auf eine Gleichung des vierten Grades von der Form

$$x^4 - x^3 + p^2 x^2 - q^2 = 0\,,$$

deren Wurzeln zu untersuchen waren. Diese Untersuchung führte mich auf eine eigenartige, unter gewissen Bedingungen mit Vorteil anwendbare Auflösung der Gleichungen des vierten Grades, die im nachfolgenden mit einigen neuerdings von mir hinzugefügten Ergänzungen dargelegt werden soll. Ich werde hierbei dem Entwickelungsgange folgen, der sich mir bei der Untersuchung gewissermassen mit Notwendigkeit aufdrängte.

1. Normalgleichung. Die oben angegebene Gleichung ist ein besonderer Fall der viel allgemeineren

$$x^4 + A x^3 + B x^2 + C = 0\,, \tag{1}$$

die wir die Normalform der Gleichung des 4. Grades oder kurz die Normalgleichung nennen wollen, da ihre Auflösung den Schlüssel liefert zur Auflösung der biquadratischen Gleichungen überhaupt. Denn jede Gleichung von der Form

$$F(y) = y^4 + a_1 y^3 + a_2 y^2 + a_3 y + a_4 = 0 \tag{2}$$

lässt sich durch geeignete Substitution auf die Normalform zurückführen. Eine solche Substitution ist z. B.

$$y = \frac{m}{x} + n. \tag{3}$$

Auf elementarem Wege ergiebt sich, wenn man schliesslich mit x^4 multipliziert,

$$(n^4 + a_1 n^3 + a_2 n^2 + a_3 n + a_4)\, x^4 + (4n^3 + 3a_1 n^2 + 2a_2 n + a_3)\, m x^3 + (6n^2 + 3a_1 n + a_2)\, m^2 x^2 + (4n + a_1)\, m^3 x + m^4 = 0.$$

Es ist daher zu setzen

$$4n + a_1 = 0; \quad n = -\frac{1}{4} a_1\,, \tag{4}$$

und die gesuchte Gleichung ist

$$x^4 + \frac{(4n^3 + 3a_1 n^2 + 2a_2 n + a_3)\, m}{n^4 + a_1 n^3 + a_2 n^2 + a_3 n + a_4} x^3 + \frac{(6n^2 + 3a_1 n + a_2)\, m^2}{n^4 + a_1 n^3 + a_2 n^2 + a_3 n + a_4} x^2 + \frac{m^4}{n^4 + a_1 n^3 + a_2 n^2 + a_3 n + a_4} = 0. \tag{5}$$

Über die Wahl des Koeffizienten m entscheidet die Absicht einem der Koeffizienten A, B, C eine bestimmte Grösse zu geben. Liegt hierzu kein Grund vor, so nehmen wir

$$m = 1: \quad y = \frac{1}{x} - \frac{1}{4} a_1. \tag{6}$$

Für allgemeine Untersuchungen über die Wurzeln ist es jedoch vorteilhaft die Zahl der Konstanten auf ein Mindestmass zu beschränken und der Normalgleichung die Form zu geben

7) $$x^4 - x^3 + Px^2 + Q = 0.$$

Hierzu ist nur nötig, dass wir wählen (s. Gleichung 5)

8) $$m = -\frac{n^4 + a_1 n^3 + a_2 n^2 + a_3 n + a_4}{4n^3 + 3a_1 n^2 + 2a_2 n + a_3}.$$

Die Gleichung 7) kann auch aus 1) hergeleitet werden. Setzt man nämlich in 1)

9) $$x = -A\xi,$$

so erhält man

$$\xi^4 - \xi^3 + \frac{B}{A^2}\xi^2 + \frac{C}{A^4} = 0,$$

und hierdurch ist auch die Beziehung zwischen A, B, C einerseits und P, Q anderseits gegeben, nämlich

10) $$P = \frac{B}{A^2}, \quad Q = \frac{C}{A^4}.$$

2. Die Umformungsrechnung nimmt unter Anwendung des Taylorschen Satzes folgende Gestalt an. Es ist

$$F(y) = F\left(n + \frac{m}{x}\right) = F(n) + \frac{m}{x}F'(n) + \frac{1}{2}\cdot\frac{m^2}{x^2}F''(n) + \frac{1}{6}\frac{m^3}{x^3}F'''(n) + \frac{1}{24}\frac{m^4}{x^4}F''''(n) = 0,$$

also nach Multiplikation mit x^4

$$F(n)x^4 + mF'(n)x^3 + \frac{1}{2}m^2F''(n)x^2 + \frac{1}{6}m^3F'''(n)x + \frac{1}{24}m^4F''''(n) = 0.$$

Es ist hierin bekanntlich

$$\begin{aligned} F(n) &= n^4 + a_1 n^3 + a_2 n^2 + a_3 n + a_4, \\ F'(n) &= 4n^3 + 3a_1 n^2 + 2a_2 n + a_3, \\ F''(n) &= 12n^2 + 6a_1 n + 2a_2, \\ F'''(n) &= 24n + 6a_1, \\ F''''(n) &= 24. \end{aligned}$$

Die erste Bedingungsgleichung ist daher

1) $$F'''(n) = 0, \quad n = -\frac{1}{4}a_1,$$

und für $m = 1$ haben wir

2) $$A = \frac{F'(n)}{F(n)}, \quad B = \frac{1}{2}\cdot\frac{F''(n)}{F(n)}, \quad C = \frac{1}{F(n)}.$$

Um die einfachere Form der Normalgleichung zu erhalten, haben wir ausser 1)

3) $$m = -\frac{F(n)}{F'(n)}, \quad P = \frac{1}{2}m^2\frac{F''(n)}{F(n)}, \quad Q = \frac{m^4}{F(n)}.$$

3. Die Wurzeln der Normalgleichung. Wir beschränken uns vorläufig auf den Fall, dass alle Wurzeln reell sind. Sind x_0, x_1, x_2, x_3 die gesuchten Wurzeln, so sind die beiden sofort zu verwertenden Eigenschaften derselben

1) $$x_0 + x_1 + x_2 + x_3 = -A,$$

2) $$x_0 x_1 x_2 + x_0 x_1 x_3 + x_0 x_2 x_3 + x_1 x_2 x_3 = 0, \quad \text{d. i.} \quad \frac{1}{x_0} + \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} = 0.$$

Diese letztere Eigenschaft kommt nun aber bekanntlich den vier Radien der Berührungskreise eines Dreiecks zu, wenn der des innern Kreises negativ genommen wird. Es ist nämlich

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2} + \frac{1}{\varrho_3}, \quad \text{also}$$

3) $$-\frac{1}{\varrho} + \frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2} + \frac{1}{\varrho_3} = 0.$$

Da ausserdem, wenn r der Radius des Umkreises ist,

4) $$-\varrho + \varrho_1 + \varrho_2 + \varrho_3 = 4r,$$

so erfüllen die vier Berührungsradien auch die erste Bedingung, wenn

5) $$4r = -A.$$

Wir setzen daher

$$x_0 = -\varrho,\ x_1 = \varrho_1,\ x_2 = \varrho_2,\ x_3 = \varrho_3.$$

Um die Bedeutung der Konstanten B und C zu ermitteln, gehen wir von den Gleichungen aus

6) $$\left\{\begin{aligned} x_0 &= -\varrho = -4r \sin\frac{1}{2}\alpha \sin\frac{1}{2}\beta \sin\frac{1}{2}\gamma, \\ x_1 &= \varrho_1 = 4r \sin\frac{1}{2}\alpha \cos\frac{1}{2}\beta \cos\frac{1}{2}\gamma, \\ x_2 &= \varrho_2 = 4r \cos\frac{1}{2}\alpha \sin\frac{1}{2}\beta \cos\frac{1}{2}\gamma, \\ x_3 &= \varrho_3 = 4r \cos\frac{1}{2}\alpha \cos\frac{1}{2}\beta \sin\frac{1}{2}\gamma. \end{aligned}\right.$$

Es ist nun zunächst

$$\begin{aligned} B &= x_0 x_1 + x_0 x_2 + x_0 x_3 + x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3 \\ &= x_0 x_1 + x_2 x_3 + (x_0 + x_1)(x_2 + x_3). \end{aligned}$$

Da aber zufolge der Gleichungen 5) und 6)

$$\begin{aligned} x_0 x_1 + x_2 x_3 &= (4r)^2 \left(\cos\frac{1}{2}\alpha^2 - \sin\frac{1}{2}\alpha^2\right) \sin\frac{1}{2}\beta \cos\frac{1}{2}\beta \sin\frac{1}{2}\gamma \cos\frac{1}{2}\gamma \\ &= \frac{1}{4} A^2 \cos\alpha \sin\beta \sin\gamma, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (x_0 + x_1)(x_2 + x_3) &= (4r)^2 \sin\frac{1}{2}\alpha \cos\frac{1}{2}(\beta + \gamma) \,.\, \cos\frac{1}{2}\alpha \sin\frac{1}{2}(\beta + \gamma) \\ &= (4r)^2 \sin\frac{1}{2}\alpha^2 \,.\, \cos\frac{1}{2}\alpha^2 \\ &= \frac{1}{4} A^2 \sin\alpha^2 = \frac{1}{2} A^2 (1 - \cos\alpha^2), \end{aligned}$$

sowird

$$\begin{aligned} B &= \frac{1}{4} A^2 + \frac{1}{4} A^2 \cos\alpha \,[\sin\beta \sin\gamma - \cos\alpha] \\ &= \frac{1}{4} A^2 + \frac{1}{4} A^2 \cos\alpha \,[\sin\beta \sin\gamma + \cos(\beta + \gamma)] \\ &= \frac{1}{4} A^2 + \frac{1}{4} A^2 \cos\alpha \cos\beta \cos\gamma, \quad \text{d. i.} \end{aligned}$$

7) $$B = \frac{1}{4} A^2 (1 + \cos\alpha \cos\beta \cos\gamma)\,^{*)}.$$

---

*) Sind a, b, c die Seiten des Dreiecks, so ergiebt sich, da $1 + \cos\alpha \cos\beta \cos\gamma = \frac{1}{2}(\sin\alpha^2 + \sin\beta^2 + \sin\gamma^2)$ und $\frac{1}{4} A^2 = 4r^2$, $B = \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2)$.

Es ist ferner

$$C = x_0 x_1 x_2 x_3 = -\varrho \varrho_1 \varrho_2 \varrho_3 = -(4r)^4 \frac{\sin\alpha^2}{4} \cdot \frac{\sin\beta^2}{4} \cdot \frac{\sin\gamma^2}{4}, \quad \text{d. i.}$$

8) $$C = -A^4 \left(\frac{\sin\alpha \sin\beta \sin\gamma}{8}\right)^2 = -F^2,$$

wo F der Flächeninhalt des Dreiecks ist. Das Ergebnis unserer Untersuchung ist also dieses: $-\varrho$, ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3 sind die Wurzeln der Gleichung $x^4 + Ax^3 + Bx^2 + C = 0$, wenn

$$A = -4r,$$

$$B = \frac{1}{4} A^2 (1 + \cos\alpha \cos\beta \cos\gamma),$$

$$C = -A^4 \left(\frac{\sin\alpha \sin\beta \sin\gamma}{8}\right)^2.$$

Liefern daher gegebene A, B und C reelle Werte für α, β, γ, so sind die Radien der vier Berührungskreise — bei ϱ mit entgegengesetztem Vorzeichen — die Wurzeln der genannten Gleichung. Wer Anstoss daran nimmt, dass hiernach Dreiecke mit negativem Umkreisradius zugelassen sind, wenn nämlich A positiv ist, dem kann geholfen werden durch die Substitution $x = -x'$.

Für die Normalgleichung $x^4 - x^3 + Px^2 + Q = 0$ gelten dieselben Schlüsse; wir brauchen nur $A = -1$ zu nehmen und B und C durch P und Q zu ersetzen. Will man jedoch nicht von einem Dreieck sprechen, dessen vierfacher Umkreisradius $= 1$ ist, so sagt der Anblick der Gleichungen 3) und 4), dass

$$-\frac{\varrho}{4r} + \frac{\varrho_1}{4r} + \frac{\varrho_2}{4r} + \frac{\varrho_3}{4r} = 1,$$

$$-\frac{4r}{\varrho} + \frac{4r}{\varrho_1} + \frac{4r}{\varrho_2} + \frac{4r}{\varrho_3} = 0;$$

und da jetzt

9) $$\begin{cases} P = \frac{1}{4}(1 + \cos\alpha \cos\beta \cos\gamma), \\ Q = -\left(\frac{\sin\alpha \sin\beta \sin\gamma}{8}\right)^2, \end{cases}$$

so lautet das Ergebnis folgendermassen: Liefern P und Q reelle Werte für α, β, γ, so sind die Verhältnisse der vier Berührungsradien zum vierfachen Umkreisradius — bei ϱ mit entgegengesetztem Vorzeichen — die Wurzeln der Gleichung $x^4 - x^3 + Px^2 + Q = 0$.

4. Die Hülfsgleichung. Es kommt also darauf an, aus A, B und C, bezw. aus P und Q die Winkel α, β, γ zu bestimmen. Hierzu dienen die Gleichungen (§ 3 : 7 und 8)

1) $$A^2 \cos\alpha \cos\beta \cos\gamma = 4B - A^2,$$

2) $$A^2 \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma = 8\sqrt{-C},$$

3) $$\alpha + \beta + \gamma = 180^0.$$

Aus 1) und 2) folgt

$$A^2 \cos\beta \cos\gamma = \frac{4B - A^2}{\cos\alpha}, \quad A^2 \sin\beta \sin\gamma = \frac{8\sqrt{-C}}{\sin\alpha}, \quad \text{mithin}$$

$$A^2 \cos(\beta + \gamma) = -A^2 \cos\alpha = \frac{4B - A^2}{\cos\alpha} - \frac{8\sqrt{-C}}{\sin\alpha},$$

$$A^2 \cos\alpha^2 + (4B - A^2) - \frac{8\sqrt{-C}}{\operatorname{tang}\alpha} = 0$$

oder $$\frac{A^2}{1 + \operatorname{tang}\alpha^2} + (4B - A^2) - \frac{8\sqrt{-C}}{\operatorname{tang}\alpha} = 0.$$

Hieraus ergibt sich die bemerkenswerte Gleichung

4) $$(4B - A^2)\,tang\,\alpha^3 - 8\sqrt{-C}\,tang\,\alpha^2 + 4B\,tang\,\alpha - 8\sqrt{-C} = 0.$$

Dieselbe Gleichung würde sich für β und γ ergeben haben.

Demnach sind $tang\,\alpha$, $tang\,\beta$, $tang\,\gamma$ die Wurzeln der Gleichung

5) $$(4B - A^2)u^3 - 8\sqrt{-C}u^2 + 4Bu - 8\sqrt{-C} = 0.$$

Dies Ergebnis kann durch folgende Erwägung geprüft werden. $tang\,\alpha$, $tang\,\beta$, $tang\,\gamma$ sind die Wurzeln der Gleichung

$$(u - tang\,\alpha)(u - tang\,\beta)(u - tang\,\gamma) =$$
$$u^3 - (tang\,\alpha + tang\,\beta + tang\,\gamma)u^2 + (tang\,\alpha\,tang\,\beta + tang\,\alpha\,tang\,\gamma + tang\,\beta\,tang\,\gamma)u - tang\,\alpha\,tang\,\beta\,tang\,\gamma = 0.$$

Nun aber ist nach trigonometrischen Sätzen und unter Berücksichtigung der Gleichungen 1) und 2)

$$tang\,\alpha + tang\,\beta + tang\,\gamma = tang\,\alpha \cdot tang\,\beta \cdot tang\,\gamma = \frac{8\sqrt{-C}}{4B - A^2},$$

$$tang\,\alpha\,tang\,\beta + tang\,\alpha\,tang\,\gamma + tang\,\beta\,tang\,\gamma = \frac{1 + \cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}{\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma} = \frac{4B}{4B - A^2}.$$

Also sind in der Tat $tang\,\alpha$, $tang\,\beta$, $tang\,\gamma$ die Wurzeln der Gleichung

6) $$u^3 - \frac{8\sqrt{-C}}{4B - A^2}u^2 + \frac{4B}{4B - A^2}u - \frac{8\sqrt{-C}}{4B - A^2} = 0,$$

die mit 5) identisch ist. Diese Gleichung möge als Hülfsgleichung bezeichnet und zur Abkürzung geschrieben werden

7) $$u^3 - Ku^2 + Lu - K = 0.$$

Geht man von der Normalgleichung $x^4 - x^3 + Px^2 + Q = 0$ aus, so ergibt sich die Hülfsgleichung in der Form

8) $$u^3 - \frac{8\sqrt{-Q}}{4P - 1}u^2 + \frac{4P}{4P - 1}u - \frac{8\sqrt{-Q}}{4P - 1} = 0,$$

die, wenn zu derselben Urgleichung $F(y) = 0$ gehörig, mit 6) völlig identisch ist, da dann $P = \frac{B}{A^2}$, $Q = \frac{C}{A^4}$ (§ 1 : 10).

5. Die Auflösung der Hülfsgleichung. Nur in seltenen Fällen wird es möglich sein die Hülfsgleichung durch Zerlegung in Faktoren aufzulösen, wenn nämlich die Wurzeln der Normalgleichung in einfacher geschlossener Form sich darstellen lassen. Meistens wird man einen umständlicheren Weg einschlagen müssen. Wir wählen den folgenden. Durch die Substitution

1) $$u = w + \frac{1}{3}K$$

entsteht die reduzierte Gleichung

2) $$\begin{cases} w^3 + Mw + N = 0, \\ M = L - \frac{1}{3}K^2, \\ N = \left(\frac{1}{3}L - \frac{2}{27}K^2 - 1\right)K = \left(\frac{1}{3}M + \frac{1}{27}K^2 - 1\right)K. \end{cases}$$

Es ist dann bekanntlich entweder

3) $$w = \sqrt[3]{-\frac{1}{2}N + \sqrt{\left(\frac{1}{2}N\right)^2 + \left(\frac{1}{3}M\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{1}{2}N - \sqrt{\left(\frac{1}{2}N\right)^2 + \left(\frac{1}{3}M\right)^3}},$$

$$\text{wenn } \left(\frac{1}{2}N\right)^2 + \left(\frac{1}{3}M\right)^3 \geq 0; \qquad \text{oder}$$

$$
4)\quad \begin{cases} \sin 3\varphi = \dfrac{\frac{1}{2}N}{\sqrt{\left(-\frac{1}{3}M\right)^3}}, \\ w_1 = 2\sqrt{-\frac{1}{3}M}\cdot \sin\varphi, \\ w_2 = 2\sqrt{-\frac{1}{3}M}\cdot \sin(60^0-\varphi), \\ -w_3 = 2\sqrt{-\frac{1}{3}M}\cdot \sin(60^0+\varphi), \end{cases}
$$

$$
\text{wenn } \left(\frac{1}{2}N\right)^2 + \left(\frac{1}{3}M\right)^3 \lesseqgtr 0.
$$

In allen denjenigen Fällen, wo die Erörterungen des § 3 angebracht sind, kommen naturgemäss die Gleichungen 4) zur Anwendung.

6. Beispiele. Bei den nachfolgenden Beispielen, die ich selbst aufgestellt oder Lehrbüchern entnommen habe, waren zwar die Wurzeln im voraus bekannt; indes ist diese Bekanntschaft nur zur Prüfung des Schlussresultates verwertet worden, auf die Rechnung selbst aber ohne jeden Einfluss geblieben. Die Gleichungen sind

I. $x^4 + 7x^3 + 13x^2 - 10 = 0,$

II. $y^4 - 2y^3 - 13y^2 + 38y - 24 = 0,$

III. $y^4 + 2y^3 - 24y^2 + 10y - 1 = 0.$

Die erste Gleichung ist in der Normalform gegeben, bedarf also keiner Umformung. Die beiden anderen Gleichungen liefern

	II	III
$F(n)$	$n^4 - 2n^3 - 13n^2 + 38n - 24$	$n^4 + 2n^3 - 24n^2 + 10n - 1$
$F'(n)$	$4n^3 - 6n^2 - 26n + 38$	$4n^3 + 6n^2 - 48n + 10$
$F''(n)$	$12n^2 - 12n - 26$	$12n^2 + 12n - 48$
$F'''(n)$	$24n - 12 = 0$	$24n + 12 = 0$
n	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$
$F(n)$	$\frac{1}{16} - \frac{1}{4} - \frac{13}{4} + 19 - 24 = -\frac{135}{16}$	$\frac{1}{16} - \frac{1}{4} - 6 - 5 - 1 = -\frac{195}{16}$
$F'(n)$	$\frac{1}{2} - \frac{3}{2} - 13 + 38 = 24$	$-\frac{1}{2} + \frac{3}{2} + 24 + 10 = 35$
$F''(n)$	$3 - 6 - 26 = -29$	$3 - 6 - 48 = -51$

Wir haben daher bezüglich für die Gleichungen II und III

$$
\text{II a.}\quad \begin{cases} n = \frac{1}{2}, \quad y = \frac{1}{x} + \frac{1}{2}, \\ x^4 - \frac{128}{45}x^3 + \frac{232}{135}x^2 - \frac{16}{135} = 0; \end{cases}
$$

$$
\text{III a.}\quad \begin{cases} n = -\frac{1}{2}, \quad y = \frac{1}{x} - \frac{1}{2}, \\ x^4 - \frac{112}{39}x^3 + \frac{136}{65}x^2 - \frac{16}{195} = 0. \end{cases}
$$

Als Hülfsgleichungen erhalten wir der Reihe nach

1) $$u^3 - \frac{8\sqrt{10}}{3}u^2 + \frac{52}{3}u - \frac{8\sqrt{10}}{3} = 0,$$

2) $$u^3 + \frac{45\sqrt{15}}{77}u^2 - \frac{29 \cdot 15}{77}u + \frac{45\sqrt{15}}{77} = 0,$$

3) $$u^3 - \frac{39\sqrt{195}}{29}u^2 + \frac{51 \cdot 39}{29}u - \frac{39\sqrt{195}}{29} = 0.$$

Die Koeffizienten der reduzierten Gleichungen sowie die weitere Rechnung finden wir in folgender Tafel zusammengestellt:

	I	II	III	
M	$-\frac{172}{27}$	$-\frac{43620}{77^2}$	$-\frac{1056 \cdot 39}{29^2}$	
N	$-\frac{952}{729}\sqrt{10}$	$\frac{870480}{77^3}\sqrt{15}$	$-\frac{3584 \cdot 39}{29^3}\sqrt{195}$	
M	— 6,3703704	— 7,3570585	— 48,970273	
N	— 1,3058985 $\sqrt{10}$	+ 1,9067187 $\sqrt{15}$	— 5,731108 $\sqrt{195}$	
$-\frac{1}{3}M$	2,1234568	2,4523528	16,323424	
$\frac{1}{2}N$	— 0,6529493 $\sqrt{10}$	0,9533594 $\sqrt{15}$	— 2,865554 $\sqrt{195}$	
$log\left(-\frac{1}{3}M\right)$	0,3270434	0,3895829	1,2128113	
	9,8148794 *n*	9,9792566	0,4572086 *n*	
	0,5	0,5880457	1,1450173	
$log\left(\frac{1}{2}N\right)$	0,3148794 *n*	0,5673023	1,6022259 *n*	
$log\sqrt{\left(-\frac{1}{3}M\right)^3}$	0,4905651	0,5843744	1,8192170	
$log\,sin\,3\varphi$	9,8243143 *n*	9,9829279	9,7830089 *n*	
3φ	— 41° 51′ 29″,58	74° 2′ 23″,0	— 37° 21′ 17″,25	
φ	— 13° 57′ 9″,86	24° 40′ 47″,67	— 12° 27′ 5″,75	
$60^0 - \varphi$	73 57 9 ,86	35 19 12 ,33	72 27 5 ,75	
$60^0 + \varphi$	46 2 50 ,14	84 40 47 ,67	47 32 54 ,25	
$log\,2$	0,3010300	0,3010300	0,3010300	
$log\sqrt{-\frac{1}{3}M}$	0,1635217	0,1947915	0,6064057	
$log\,sin\,\varphi$	9,3822358 *n*	9,6207069	9,3336785 *n*	
$log\,sin\,(60^0 - \varphi)$	9,9827387	9,7620358	9,9793036	
$log\,sin\,(60^0 + \varphi)$	9,8572798	9,9981251	9,8679668	
$log\,w_1$	9,8467875 *n*	0,1165284	0,2411142 *n*	Probe:
$log\,w_2$	0,4472904	0,2578573	0,8867393	Summe
$log\,(-w_3)$	0,3218315	0,4939466	0,7754025	$= log\,N$

2

	I	II	III	
$\frac{1}{3}K$	$\frac{8}{9}\sqrt{10}$	$-\frac{15}{77}\sqrt{15}$	$\frac{13}{29}\sqrt{195}$	
	9,9488475 0,5	9,2896005 n 0,5880457	9,6515454 1,1450173	
$log\left(\frac{1}{3}K\right)$	0,4488475	9,8776462 n	0,7965627	
$\frac{1}{3}K$	2,8109136	— 0,7544774	6,259832	
w_1	— 0,7027284	1,3077611	— 1,742265	Probe:
w_2	2,8008536	1,8107450	7,704409	Summe
w_3	— 2,0981256	— 3,1185064	— 5,962144	$= 0$
$tang\,\alpha = u_1$	2,1081852	0,5532837	4,517567	Probe:
$tang\,\beta = u_2$	5,6117672	1,0562676	13,964241	Summe
$tang\,\gamma = u_3$	0,7127880	— 3,8729838	0,297688	K
$log\,tang\,\alpha$	0,3239087	9,7429479	0,6549046	Probe:
$log\,tang\,\beta$	0,7490996	0,0237740	1,1450173	Summe
$log\,tang\,\gamma$	9,8529604	0,5880457 n	9,4737613	$= log\,K$
α	64° 37′ 23″,03	28° 67′ 18″,15	77° 31′ 6″,17	Probe:
β	79 53 46 ,03	46 34 2″,82	85 54 14 ,24	Summe
γ	35 28 50 ,94	104 28 39 ,03	16 34 39 ,49	$= 180°$

Einzelne Zahlen der vorstehenden Tafel geben zu Bemerkungen Anlass. Zunächst ist die Summe der Winkel in III im Vergleich zu der sonst erzielten Genauigkeit nicht hinreichend genau gleich 180°. Der Grund ist leicht zu finden: $u_3 = 0{,}297688$ ist nur mit 6 Stellen statt mit 7 ermittelt. Da u_1 und u_2 genauer gefunden sind, werden wir bei der weiteren Rechnung den auf Grund der Werte von α und β verbesserten Wert $\gamma = 16^0\,14'\,39'',6$ zugrunde legen.

Es muss ferner auffallen, dass die Logarithmen von $\sqrt{15}$ und $\sqrt{195}$, die in II und III zur Berechnung von $log\left(\frac{1}{2}N\right)$ und $log\left(\frac{1}{3}K\right)$ benutzt wurden, unten in den betr. Spalten bei $log\,tang\,\gamma$, bezw. bei $log\,tang\,\beta$ wiederkehren. Demnach hat die Hülfsgleichung 2) eine Wurzel $= -\sqrt{15}$, die Hülfsgleichung 3) eine Wurzel $= \sqrt{195}$. Obgleich etwas Ähnliches bei I nicht auffällt, hat auch die Hülfsgleichung 1) eine geschlossene Wurzel. Diese Wurzeln und damit auch die übrigen lassen sich durch Zerlegung ohne Mühe finden, wenn wir die Hülfsgleichungen rational machen, indem wir in 1) $u = v\sqrt{10}$, in 2) $u = v\sqrt{15}$, in 3) $u = v\sqrt{195}$ setzen. Dann ergibt sich

4) $$v^3 - \frac{8}{3}v^2 + \frac{26}{15}v - \frac{4}{15} = 0; \quad v = \frac{2}{3}; \quad u = \frac{2}{3}\sqrt{10};$$

5) $$v^3 + \frac{45}{77}v^2 - \frac{29}{77}v + \frac{3}{77} = 0; \quad v = -1; \quad u = -\sqrt{15};$$

6) $$v^3 - \frac{39}{29}v^2 + \frac{51}{145}v - \frac{1}{145} = 0; \quad v = 1; \quad u = \sqrt{195}.$$

Die Hülfsgleichungen bekommen also die Form

1) $$3u^3 - 8\sqrt{10}\,u^2 + 52u - 8\sqrt{10} = (3u - 2\sqrt{10})\,(u^2 - 2u\sqrt{10} + 4) = 0,$$

2) $$77u^3 + 45\sqrt{15}\,u^2 - 29\cdot 15u + 45\sqrt{15} = (u + \sqrt{15})\,(77u^2 - 32u\sqrt{15} + 45) = 0,$$

3) $$29u^3 - 39\sqrt{195}\,u^2 + 51\cdot 39u - 39\sqrt{195} = (u - \sqrt{195})\,(29u^2 - 10u\sqrt{195} + 39) = 0.$$

Belassen wir den Wurzeln diejenige Reihennummer, die sie in unserer Tafel haben, so finden wir

	I	II	III
u_1	$\frac{2}{3}\sqrt{10} = 2{,}1081851$	$\frac{1}{7}\sqrt{15} = 0{,}5532833$	$\frac{1}{29}(5\sqrt{195} + 12\sqrt{26}) = 4{,}517567$
u_2	$\sqrt{10} + \sqrt{6} = 5{,}6117674$	$\frac{3}{11}\sqrt{15} = 1{,}0562682$	$\sqrt{195} = 13{,}964240$
u_3	$\sqrt{10} - \sqrt{6} = 0{,}7127879$	$-\sqrt{15} = -3{,}8729833$	$\frac{1}{29}(5\sqrt{195} - 12\sqrt{26}) = 0{,}2976886$

Da diese Zahlen von unseren früheren Resultaten höchstens in der letzten Dezimalstelle abweichen, insbesondere auch der zu u_3 in III gemachten Bemerkung völlig Recht geben, so können wir die Rechnung auf Grund der früheren Ergebnisse zu Ende führen.

	I	II	III
$\frac{1}{2}\alpha$	32° 18′ 41″,51	14° 28′ 39″,07	38° 45′ 33″,08
$\frac{1}{2}\beta$	39 56 53 ,02	23 17 1 ,41	42 57 7 ,12
$\frac{1}{2}\gamma$	17 44 25 ,47	52 14 19 ,52	8 17 19 ,80
$4r = -A$	-7	$\frac{128}{45}$	$\frac{112}{39}$
$\log(4r)$	0,8450980 n	0,4539975	0,4581534
$\log\sin\frac{1}{2}\alpha$	9,7279659	9,3979402	9,7966080
$\log\sin\frac{1}{2}\beta$	9,8075979	9,5969099	9,8333927
$\log\sin\frac{1}{2}\gamma$	9,4838794	9,8979400	9,1588548
$\log\cos\frac{1}{2}\alpha$	9,9269360	9,9859856	9,8919744
$\log\cos\frac{1}{2}\beta$	9,8845840	9,9631069	9,8644666
$\log\cos\frac{1}{2}\gamma$	9,9788407	9,7870156	9,9954395
$\log\varrho$	9,8645412 n	9,3467876	9,2470089
$\log\varrho_1$	0,4364886 n	9,6020602	0,1146675
$\log\varrho_2$	0,5584726 n	9,8239086	0,1789600
$\log\varrho_3$	0,1404974 n	0,3010300	9,3734492

	I	II	III	
für I: $x_0 = -\varrho$	0,7320508	— 4,5	— 5,662277	$\frac{1}{x_0}$ für II und III
$x_1 = \varrho_1$	— 2,732050	2,5	0,7679492	$\frac{1}{x_1}$
$x_2 = \varrho_2$	— 3,618033	1,5	0,6622775	$\frac{1}{x_2}$
$x_3 = \varrho_3$	— 1,381967	0,5	4,232050	$\frac{1}{x_3}$
		+ 0,5	— 0,5	n
	y_0	— 4	— 6,162277	
	y_1	3	0,267949	
	y_2	2	0,162278	
	y_3	1	3,732050	

Schlussbemerkung: In II und III sind statt der Wurzeln x_0, x_1 u. s. w. ihre reziproken Werte ermittelt worden, weil es hier nicht sowohl auf die Kenntnis von x als vielmehr auf die Berechnung von $y = \frac{1}{x} + n$ ankommt. Die Schlusswerte in I und III fallen durch ihre Ziffern auf; man erkennt leicht, dass

$$x_0 \text{ und } x_1, = -1 \pm 1{,}73205,\quad x_2 \text{ und } x_3 = -2{,}5 \pm 1{,}118033;$$
$$y_0 \text{ und } y_2 = -3 \pm 3{,}16228,\quad y_1 \text{ und } y_3 = 2 \pm 1{,}73205.$$

Demnach sind dies die Wurzeln der Gleichungen

$$[(x+1)^2 - 1{,}73205^2]\,[(x+2{,}5)^2 - 1{,}118033^2] = 0,$$
$$[(y+3)^2 - 3{,}16228^2]\,[(y-2)^2 - 1{,}73205^2] = 0.$$

Nun aber ist $1{,}73205^2 = 3;\quad 1{,}118033^2 = 1{,}25;\quad 3{,}16228^2 = 10.$

Also haben wir einfacher

$$[(x+1)^2 - 3]\,[(x+2{,}5)^2 - 1{,}25] = (x^2 + 2x - 2)(x^2 + 5x + 5) = x^4 + 7x^3 + 13x^2 - 10 = 0,$$
$$[y+3)^2 - 10]\,[(y-2)^2 - 3] = (y^2 + 6y - 1)(y^2 - 4y + 1) = y^4 + 2y^3 - 24y^2 + 10y - 1 = 0.$$

Hiermit ist die Probe auf die Richtigkeit der Auflösung gemacht, auch die geschlossene Form der Wurzeln gegeben:

$$x_0 \text{ und } x_1 = -1 \pm \sqrt{3},\qquad x_2 \text{ und } x_3 = \frac{1}{2}(-5 \pm \sqrt{5});$$
$$y_0 \text{ und } y_2 = -3 \pm \sqrt{10},\qquad y_1 \text{ und } y_3 = 2 \pm \sqrt{3}.$$

7. Grenzen der Anwendbarkeit. Die im vorhergehenden erläuterte Auflösungsmethode ist in dieser Form nur innerhalb gewisser Grenzen für $P = B : A^2$ und $Q = C : A^4$ anwendbar, über die man sich aus den Gleichungen 7) bis 9) in § 3 Auskunft holen kann. Dass aber auch andere Normalgleichungen, die jenen Bedingungen nicht genügen, vier reelle Wurzeln haben können, zeigt folgende Betrachtung, die sich zwar auf den Fall von vier reellen Wurzeln beschränken soll, zugleich aber die wesentlichen Grundlagen zur Untersuchung der Wurzeln überhaupt enthält. Es sei

1) $$f(x) = x^4 + Ax^3 + Bx^2 + C.$$

Damit $f(x) = 0$ vier reelle Wurzeln habe, ist notwendig und hinreichend, dass erstens die Funktion drei reelle Grenzwerte — ein Maximum und zwei Minima — habe, und dass zweitens das Maximum positiv und die Minima negativ seien.

Die Grenzwerte treten ein, wenn

2) $$f'(x) = 4x^3 + 3Ax^2 + 2Bx = x(4x^2 + 3Ax + 2B) = 0.$$

Sind ξ_0, ξ_1, ξ_2 die Wurzeln dieser Gleichung, so haben wir

$$3)\qquad \xi_0 = 0; \quad \xi_1 = -\frac{3}{8}A\left(1-\sqrt{1-\frac{32}{9}P}\right); \quad \xi_2 = -\frac{3}{8}A\left(1+\sqrt{1-\frac{32}{9}P}\right),$$

wo $P = B : A^2$. Die Grenzwerte sind also nur dann sämtlich reell, wenn $\frac{32}{9}P \leqq 1$. Demnach setzen wir voraus, dass $\frac{32}{9}P < 1$.

Welcher Art die Grenzwerte sind, ergibt sich aus

$$4)\qquad f''(\xi) = 12\,\xi^2 + 6A\xi + 2B.$$

Es ist sofort

$$5)\qquad f''(\xi_0) = 2B.$$

Und da

$$\begin{aligned} f''(\xi_1) &= 12\,\xi_1{}^2 + 6A\xi_1 + 2B, \\ \frac{3f'(\xi_1)}{\xi_1} = 0 &= 12\,\xi_1{}^2 + 9A\xi_1 + 6B, \quad \text{so ist} \\ \hline f''(\xi_1) = &\quad -3A\xi_1 - 4B \\ &= \frac{9}{8}A^2\left(1-\sqrt{1-\frac{32}{9}P}\right) - 4B, \quad \text{also} \end{aligned}$$

$$6)\qquad f''(\xi_1) = \frac{9}{8}A^2\left(1-\frac{32}{9}P - \sqrt{1-\frac{32}{9}P}\right); \quad \text{ebenso erhält man}$$

$$7)\qquad f''(\xi_2) = \frac{9}{8}A^2\left(1-\frac{32}{9}P + \sqrt{1-\frac{32}{9}P}\right).$$

Für die weitere Untersuchung unterscheiden wir zwischen einem positiven und einem negativen B, bezw. P.

I. Ist $1 > \frac{32}{9}P > 0$, also $1 - \frac{32}{9}P$ ein echter Bruch und demnach $\sqrt{1-\frac{32}{9}P} > 1 - \frac{32}{9}P$, so folgt $\xi_2 \gtrless \xi_1 \gtrless 0$, je nachdem $A \lesseqgtr 0$, und ferner

$$\begin{aligned} f''(\xi_0) &> 0, \quad f(\xi_0) = f(0) = C \text{ ein Minimum;} \\ f''(\xi_1) &< 0, \quad f(\xi_1) \text{ ein Maximum;} \\ f''(\xi_2) &> 0, \quad f(\xi_2) \text{ ein Minimum.} \end{aligned}$$

Die Wurzeln sind also sämtlich reell, wenn C negativ, $f(\xi_1)$ positiv und $f(\xi_2)$ wieder negativ ist. Eine leichte Überlegung zeigt, zumal unter Anwendung einer graphischen Darstellung der Grenzwerte von $f(x)$, dass wir in diesem Falle eine negative und drei positive oder umgekehrt eine positive und drei negative Wurzeln haben, je nachdem A negativ oder positiv ist.

II. Ist $P < 0$, also $1 - \frac{32}{9}P > 1$ und folglich $\sqrt{1-\frac{32}{9}P} < 1 - \frac{32}{9}P$, so ist, wenn $A \lesseqgtr 0$, $\xi_1 \lesseqgtr 0 \lesseqgtr \xi_2$; ferner

$$\begin{aligned} f''(\xi_0) &< 0, \quad f(\xi_0) = f(0) = C \text{ ein Maximum;} \\ f''(\xi_1) &> 0, \quad f(\xi_1) \text{ ein Minimum;} \\ f''(\xi_2) &> 0, \quad f(\xi_2) \text{ ein Minimum.} \end{aligned}$$

Ist also C positiv und sind $f(\xi_1)$ und $f(\xi_2)$ beide negativ, so haben wir auch jetzt vier reelle Wurzeln, die aber offenbar zur Hälfte negativ und zur Hälfte positiv sind.

Die Gleichung $x^4 + Ax^3 + Bx^2 + C = 0$ hat also, wenn die Wurzeln sämtlich reell sind, entweder nur eine negative bezw. positive und drei dieser entgegengesetzte Wurzeln, oder zwei negative und zwei positive Wurzeln. Nur im ersten Falle ist unsere trigonometrische Auflösung sofort anwendbar, im zweiten Falle nicht.

8. Erweiterung der Grenzen. Der soeben erwähnte zweite Fall gestattet zwar eine unmittelbare Anwendung unserer Auflösungsweise nicht. Der Grund liegt, wie man sieht, darin, dass $f(0) = C$ ein Maximum ist, die Minima also auf verschiedenen Seiten des Nullwertes von x liegen. Verlegen wir daher den Nullwert der Unbekannten in eines der beiden Minima, so kommen das Maximum und das zweite Minimum auf die nämliche Seite des Nullwertes zu liegen; damit ist der zweite Fall auf den ersten zurückgeführt. Ein Beispiel wird das Verfahren veranschaulichen. Es sei gegeben die Gleichung

1) $$x^4 - x^3 - 5x^2 + 2 = 0.$$

Da $\sqrt{-Q} = \sqrt{-2}$ imaginär, so ist dieselbe nicht ohne weiteres nach der trigonometrischen Methode auflösbar. Die Gleichung

$$f'(x) = 4x^3 - 3x^2 - 10x = x(4x^2 - 3x - 10) = 0$$

hat aber drei reelle Wurzeln:

$$\xi_0 = 0, \quad \xi_1 = \frac{3}{8} - \frac{13}{8} = -\frac{5}{4}, \quad \xi_2 = \frac{3}{8} + \frac{13}{8} = 2;$$

und da $f''(x) = 12x^2 - 6x - 10$, so ist

$$f''(\xi_0) = -10, \quad \text{also } f(0) = 2 \text{ ein Maximum};$$

$$f''(\xi_1) = +\frac{65}{4}, \quad \text{also } f\left(-\frac{5}{4}\right) = -\frac{363}{256} \text{ ein Minimum};$$

$$f''(\xi_2) = +26, \quad \text{also } f(2) = -10 \text{ ein Minimum}.$$

Demnach hat die Gleichung 1) zwei positive und zwei negative reelle Wurzeln. Setzen wir nun

2) $$x = x' + \xi_2 = x' + 2,$$

so erhalten wir die neue Gleichung

3) $$x'^4 + 7x'^3 + 13x'^2 - 10 = 0.$$

Diese Gleichung ist zur trigonometrischen Auflösung geeignet und in § 6 als Beispiel I erledigt. Nach den dort gefundenen Resultaten ist

$$x_0' \text{ und } x_1' = -1 \pm \sqrt{3}, \quad x_2' \text{ und } x_3' = -\frac{5}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{5}, \quad \text{also nach 2)}$$

4) $$x_0 \text{ und } x_1 = 1 \pm \sqrt{3}, \quad x_2 \text{ und } x_3 = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{5}.$$

9. Versuch einer Verallgemeinerung. Naturgemäss erhebt sich die Frage, ob nicht auch solche Normalgleichungen, deren Konstanten zu widersprechen scheinen, nach unserer Methode sich auflösen lassen. Fest steht, dass in diesem Falle keine reellen Winkel α, β, γ existieren, welche den Bedingungen genügen. Wenn wir aber die Grössen $\cos\alpha$, $\operatorname{tang}\alpha$, $\sin\frac{1}{2}\alpha$, $\cos\frac{1}{2}\alpha$ im übrigen ohne Rücksicht auf ihre goniometrische Bedeutung dahin definieren, dass sie durch die Gleichungen verbunden sind

$$\cos\alpha^2 = \frac{1}{1 + \operatorname{tang}\alpha^2}, \quad 2\sin\frac{1}{2}\alpha^2 = 1 - \cos\alpha, \quad 2\cos\frac{1}{2}\alpha^2 = 1 + \cos\alpha,$$

so ist es der Mühe wert die Auflösung an einigen Beispielen zu versuchen.

I. Als erstes Beispiel wählen wir die Gleichung des vorigen § in ihrer ursprünglichen Form. Wir haben also

1) $$x^4 - x^3 - 5x^2 + 2 = 0,$$

2) $$P = -5, \quad 4P - 1 = -21, \quad Q = 2, \quad \sqrt{-Q} = \sqrt{-2}.$$

Hiernach ist die Hülfsgleichung

3) $$-21u^3 - 8\sqrt{-2}\,u^2 - 20u - 8\sqrt{-2} = 0.$$

Um sie reell und rational zu machen, setzen wir

4) $$u = v\sqrt{-2}, \quad u^2 = -2v^2, \quad u^3 = -2v^3\sqrt{-2}.$$

Dadurch erhalten wir nach gehöriger Umformung

5) $$21v^3 + 8v^2 - 10v - 4 = 0.$$

Diese Gleichung hat die Wurzeln

6) $$v_1 = -\frac{2}{3}, \quad v_2 = \frac{1}{7}(1 - \sqrt{15}), \quad v_3 = \frac{1}{7}(1 + \sqrt{15}).$$

Mithin ist

7) $$\begin{cases} tang\,\alpha^2 = u_1{}^2 = -2v_1{}^2 = -\frac{8}{9}, \\ tang\,\beta^2 = u_2{}^2 = -2v_2{}^2 = -\frac{4}{49}(8 - \sqrt{15}), \\ tang\,\gamma^2 = u_3{}^2 = -2v_3{}^2 = -\frac{4}{49}(8 + \sqrt{15}); \end{cases}$$

8) $$cos\,\alpha^2 = 3^2, \quad cos\,\beta^2 = (\sqrt{12} - \sqrt{5})^2, \quad cos\,\gamma^2 = (\sqrt{12} + \sqrt{5})^2.$$

Es erhebt sich nun die Frage, welche Vorzeichen für $cos\,\alpha$, $cos\,\beta$, $cos\,\gamma$ zu nehmen sind. Nach unseren früheren Erörterungen (§ 3 : 9) ist

$$cos\,\alpha\,cos\,\beta\,cos\,\gamma = 4P - 1 = -21.$$

Also sind entweder die drei Kosinus sämtlich negativ oder nur einer negativ und die anderen positiv zu wählen. Welche von den vier brauchbaren Kombinationen wir wählen, ist gleichgültig, da jede die nämlichen Wurzeln, wenn auch in anderer Reihenfolge, liefert. Beachten wir jedoch, dass

$$2\,sin\,\frac{1}{2}\alpha^2 = 1 - cos\,\alpha, \quad 2\,cos\,\frac{1}{2}\alpha^2 = 1 + cos\,\alpha, \quad \text{und dass}$$

$$x_0 = -\,sin\,\frac{1}{2}\alpha\,sin\,\frac{1}{2}\beta\,sin\,\frac{1}{2}\gamma,$$

$$x_1 = \,sin\,\frac{1}{2}\alpha\,cos\,\frac{1}{2}\beta\,cos\,\frac{1}{2}\gamma, \quad \text{u. s. w.,}$$

dass also x_1, abgesehen vom Vorzeichen, aus x_0 hervorgeht, indem $sin\,\frac{1}{2}\beta$ und $sin\,\frac{1}{2}\gamma$ durch $cos\,\frac{1}{2}\beta$ und $cos\,\frac{1}{2}\gamma$, demnach $-cos\,\beta$ und $-cos\,\gamma$ durch $+cos\,\beta$ und $+cos\,\gamma$ ersetzt werden, so erkennen wir, dass die vier Wurzeln, wieder abgesehen von ihrem Vorzeichen, durch die eine x_0 repräsentiert werden, wenn wir den Werten $cos\,\alpha$, $cos\,\beta$, $cos\,\gamma$ nacheinander die in nachstehender Tafel zusammengestellten Vorzeichen geben:

9)

	x_0	x_1	x_2	x_3
$cos\,\alpha$	—	—	+	+
$cos\,\beta$	—	+	—	+
$cos\,\gamma$	—	+	+	—

Wir wollen jedoch hier die ursprüngliche Ableitung beibehalten und dabei drei negative Kosinus zugrunde legen. Dann ist

10) $$cos\,\alpha = -3, \quad cos\,\beta = -(\sqrt{12} - \sqrt{5}), \quad cos\,\gamma = -(\sqrt{12} + \sqrt{5});$$

11) $$\begin{cases} 2\,sin\,\frac{1}{2}\alpha^2 = 4, & 2\,cos\,\frac{1}{2}\alpha^2 = -2, \\ 2\,sin\,\frac{1}{2}\beta^2 = 1 + \sqrt{12} - \sqrt{5}, & 2\,cos\,\frac{1}{2}\beta^2 = 1 - \sqrt{12} + \sqrt{5}, \\ 2\,sin\,\frac{1}{2}\gamma^2 = 1 + \sqrt{12} + \sqrt{5}, & 2\,cos\,\frac{1}{2}\gamma^2 = 1 - \sqrt{12} - \sqrt{5}. \end{cases}$$

Hieraus folgt durch Multiplikation nach gehöriger Vereinfachung

$$12)\quad \begin{cases} x_0{}^2 = \sin\frac{1}{2}\alpha^2 \sin\frac{1}{2}\beta^2 \sin\frac{1}{2}\gamma^2 = 4 + 2\sqrt{3} = (1 + \sqrt{3})^2, \\ x_1{}^2 = \sin\frac{1}{2}\alpha^2 \cos\frac{1}{2}\beta^2 \cos\frac{1}{2}\gamma^2 = 4 - 2\sqrt{3} = (1 - \sqrt{3})^2, \\ x_2{}^2 = \cos\frac{1}{2}\alpha^2 \sin\frac{1}{2}\beta^2 \cos\frac{1}{2}\gamma^2 = \frac{1}{4}(6 + 2\sqrt{5}) = \frac{1}{4}(1 + \sqrt{5})^2. \\ x_3{}^2 = \cos\frac{1}{2}\alpha^2 \cos\frac{1}{2}\beta^2 \sin\frac{1}{2}\gamma^2 = \frac{1}{4}(6 - 2\sqrt{5}) = \frac{1}{4}(1 - \sqrt{5})^2. \end{cases}$$

Nach der Radizierung kommt es nun abermals auf die Wahl der Vorzeichen an. Hierzu dient die Forderung, dass

$$x_0 + x_1 + x_2 + x_3 = 1$$

werden muss. Eine leichte Probe zeigt, dass in Übereinstimmung mit dem Ergebnis des vorigen §

$$13)\quad x_0 = 1 + \sqrt{3},\ x_1 = 1 - \sqrt{3},\ x_2 = -\frac{1}{2}(1 + \sqrt{5}),\ x_3 = -\frac{1}{2}(1 - \sqrt{5}).$$

II. Ein anderes Beispiel ist

$$1)\quad y^4 - 7y^2 - 12y + 18 = 0.$$

Wir setzen $y = \frac{3}{2x}$, dann wird die Normalgleichung

$$2)\quad x^4 - x^3 - \frac{7}{8}x^2 + \frac{9}{32} = 0;\quad P = -\frac{7}{8},\quad 4P - 1 = -\frac{9}{2},\quad Q = \frac{9}{32}.$$

Die Hülfsgleichung ist, ordentlich vereinfacht,

$$3)\quad 27u^3 + 18\sqrt{-2}\,u^2 + 21u + 18\sqrt{-2} = 0.$$

Nehmen wir hier

$$4)\quad 3u = v\sqrt{-2},\quad 9u^2 = -2v^2,\quad 27u^3 = -2v^3\sqrt{-2},$$

so kommt schliesslich

$$5)\quad \begin{cases} v^3 + 2v^2 - \frac{7}{2}v - 9 = 0; \\ v_1 = 2,\quad v_2 = -2 + \frac{1}{2}i\sqrt{2},\quad v_3 = -2 - \frac{1}{2}i\sqrt{2}. \end{cases}$$

Mithin ist

$$6)\quad \begin{cases} \operatorname{tang}\alpha^2 = u_1{}^2 = -\frac{2}{9}v_1{}^2 = -\frac{8}{9}, & \cos\alpha^2 = 9; \\ \operatorname{tang}\beta^2 = u_2{}^2 = -\frac{2}{9}v_2{}^2 = -\frac{7}{9} + \frac{4}{9}i\sqrt{2}, & \cos\beta^2 = (1 - \frac{1}{2}i\sqrt{2})^2; \\ \operatorname{tang}\gamma^2 = u_3{}^2 = -\frac{2}{9}v_3{}^2 = -\frac{7}{9} - \frac{4}{9}i\sqrt{2}, & \cos\gamma^2 = (1 + \frac{1}{2}i\sqrt{2})^2. \end{cases}$$

Die Erwägung über die Vorzeichen ergibt dieselbe Zeichenfolge wie in Beispiel I. Hier wollen wir jedoch zur Abwechselung die Wurzeln durch die in I, 9) angedeutete Gruppierung der Vorzeichen aus $\sin\frac{1}{2}\alpha \sin\frac{1}{2}\beta \sin\frac{1}{2}\gamma$ bestimmen. Wir erhalten

	0	1	2	3
$\cos\alpha$	-3	-3	$+3$	$+3$
$\cos\beta$	$-1 + \frac{1}{2}i\sqrt{2}$	$+1 - \frac{1}{2}i\sqrt{2}$	$-1 + \frac{1}{2}i\sqrt{2}$	$+1 - \frac{1}{2}i\sqrt{2}$
$\cos\gamma$	$-1 - \frac{1}{2}i\sqrt{2}$	$+1 + \frac{1}{2}i\sqrt{2}$	$+1 + \frac{1}{2}i\sqrt{2}$	$-1 - \frac{1}{2}i\sqrt{2}$

	0	1	2	3
$2\sin\frac{1}{2}\alpha^2$	4	4	-2	-2
$2\sin\frac{1}{2}\beta^2$	$2-\frac{1}{2}i\sqrt{2}$	$+\frac{1}{2}i\sqrt{2}$	$2-\frac{1}{2}i\sqrt{2}$	$+\frac{1}{2}i\sqrt{2}$
$2\sin\frac{1}{2}\gamma^2$	$2+\frac{1}{2}i\sqrt{2}$	$-\frac{1}{2}i\sqrt{2}$	$-\frac{1}{2}i\sqrt{2}$	$2+\frac{1}{2}i\sqrt{2}$
$8x^2$	18	2	$1+2i\sqrt{2}$ $=\frac{1}{2}(2+i\sqrt{2})^2$	$1-2i\sqrt{2}$ $=\frac{1}{2}(2-i\sqrt{2})^2$
x^2	$\frac{9}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}(2+i\sqrt{2})^2$	$\frac{1}{16}(2-i\sqrt{2})^2$
7) x	$+\frac{3}{2}$ $=x_0$	$+\frac{1}{2}$ $=x_1$	$-\frac{1}{4}(2+i\sqrt{2})$ $=x_2$	$-\frac{1}{4}(2-i\sqrt{2})$ $=x_3$

Für die Wahl der Vorzeichen ist wieder entscheidend, dass $x_0+x_1+x_2+x_3=1$ sein muss. Schliesslich wird $y=\frac{3}{2x}$, also

8) $$y_0=1,\quad y_1=3,\quad y_2=-2+i\sqrt{2},\quad y_3=-2-i\sqrt{2}.$$

Eine leichte Probe ergibt die Richtigkeit der Lösung.

III. Als letztes Beispiel sei gegeben

1) $$x^4-x^3+2x^2+1=0;\quad P=2,\quad 4P-1=7,\quad Q=1.$$

Aus der Hülfsgleichung

2) $$7u^3-8\sqrt{-1}u^2+8u-8\sqrt{-1}=0$$

erhalten wir, wenn $u=v\sqrt{-1}$ genommen wird,

3) $$7v^3-8v^2-8v+8=0,$$

eine Gleichung, deren Wurzeln sich nicht in geschlossener Form werden darstellen lassen. Wir bilden daher durch die Substitution

4) $$v=w+\frac{8}{21}$$

die reduzierte Gleichung

5) $$w^3-\frac{232}{147}w+\frac{5528}{9261}=0$$

mit $\frac{1}{3}M=-\frac{232}{441}$ und $\frac{1}{2}N=\frac{2764}{9261}$ und rechnen, wie folgt:

$\log 2764=3{,}4415380$	$\log 232=2{,}3654880$
$\log 9261=3{,}9666579$	$\log 441=2{,}6444386$
$\log\left(\frac{1}{2}N\right)=9{,}4748801$	$\log\left(-\frac{1}{3}M\right)=9{,}7210494$
$\log\sqrt{\left(-\frac{1}{3}M\right)^3}=9{,}5815741$	$\log\sqrt{\left(-\frac{1}{3}M\right)}=9{,}8605247$
$\log\sin 3\varphi=9{,}8933060$	$\log 2=0{,}3010300$

6)

$3\varphi = 51^{0}27'37'',8$	$\log\left(2\sqrt{-\frac{1}{3}M}\right) = 0{,}1615547$
$\varphi = 17\ \ 9\ 12\ ,6$	$\log\sin\varphi = 9{,}4697228$
$60^{0} - \varphi = 42\ 50\ 47\ ,4$	$\log\sin(60^{0} - \varphi) = 9{,}8325323$
$60^{0} + \varphi = 77\ \ 9\ 12\ ,6$	$\log\sin(60^{0} + \varphi) = 9{,}9889909$
$w_1 = 0{,}4278362$ $w_2 = 0{,}9864770$ $w_3 = -1{,}4143133$ } Probe: Summe $= 0$	$\log w_1 = 9{,}6312775$ $\log w_2 = 9{,}9940870$ $\log(-w_3) = 0{,}1505456$
$\frac{8}{21} = 0{,}3809524$	
$v_1 = 0{,}8087886$ $v_2 = 1{,}3674294$ $v_3 = -1{,}0333609$ } Probe: Summe $= \frac{8}{7}$	$\log v_1 = 9{,}9078350$ $\log v_2 = 0{,}1359049$ $\log(-v_3) = 0{,}0142520$ } Probe: Summe $= \log\frac{8}{7}$
1,1428571	0,0579919
$u_1{}^2 = -v_1{}^2 = -0{,}6541390$ $u_2{}^2 = -v_2{}^2 = -1{,}869863$ $u_3{}^2 = -v_3{}^2 = -1{,}0678346$	$\log v_1{}^2 = 9{,}8156700$ $\log v_2{}^2 = 0{,}2718098$ $\log v_3{}^2 = 0{,}0285040$

	$1 + u^2$	$\log(1 + u^2)$	$\log\frac{1}{1+u^2}$	$\log\sqrt{\frac{1}{1+u^2}} = \log\cos$
u_1	0,3458610	9,5389016	0,4610984	0,2305492
u_2	— 0,869863	9,9394509 n	0,0605491 n	0,0302746 [i]
u_3	— 0,0678346	8,8314512 n	1,1685488 n	0,5842744 [i]

Für die folgende Zusammenstellung ergeben sich die Vorzeichen aus dem Umstande, dass $\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma = +7$ werden muss; hieraus folgt noch $\log\cos\alpha + \log\cos\beta + \log\cos\gamma = \log 7$; in der Tat ist die Summe der Logarithmen der letzten Spalte in der vorhergehenden Tabelle 0,8450982, d. i. bis auf eine kleine nicht weiter störende Abweichung in der letzten Stelle $= \log 7$.

	0	1	2	3
$\cos\alpha$	— 1,7003925	— 1,7003925	+ 1,7003925	+ 1,7003925
$\cos\beta$	+ 1,072197 i	— 1,072197 i	+ 1,072197 i	— 1,072197 i
$\cos\gamma$	+ 3,839497 i	— 3,839497 i	— 3,839497 i	+ 3,839497 i
$2\sin\frac{1}{2}\alpha^2$	2,7003925	2,7003925	— 0,7003925	— 0,7003925
$2\sin\frac{1}{2}\beta^2$	1 — 1,072197 i	1 + 1,072197 i	1 — 1,072197 i	1 + 1,072197 i
$2\sin\frac{1}{2}\gamma^2$	1 — 3,839497 i	1 + 3,839497 i	1 + 3,839497 i	1 — 3,839497 i

Für die weitere Rechnung wird es vorteilhaft sein den Grössen $2\sin\frac{1}{2}\alpha^2$ u. s. w. die Form $k(\cos\varkappa + i\sin\varkappa)$ zu geben. Wir setzen daher

$$7)\quad \begin{cases} 2\,sin\,\frac{1}{2}\,\alpha^2 = k\,(cos\,\varkappa + i\,sin\,\varkappa), \\ 2\,sin\,\frac{1}{2}\,\beta^2 = l\,(cos\,\lambda + i\,sin\,\lambda), \\ 2\,sin\,\frac{1}{2}\,\gamma^2 = m\,(cos\,\mu + i\,sin\,\mu). \end{cases}$$

Bedienen wir uns noch der Abkürzungen

$$\frac{1}{8}\,k\,l\,m = R^2, \quad \varkappa + \lambda + \mu = 2\,\vartheta, \quad \text{so wird}$$

$$8)\quad x^2 = R^2\,(cos\,2\,\vartheta + i\,sin\,2\,\vartheta), \quad x = R\,(cos\,\vartheta + i\,sin\,\vartheta).$$

Hieraus erhalten wir die 4 Wurzeln durch die 4 den Bedingungen der Gleichung genügenden Kombinationen der Vorzeichen, bezw. der Werte von $\varkappa$, λ, μ. Schliesslich haben wir

$$9)\quad \xi = R\,cos\,\vartheta, \quad \eta = R\,sin\,\vartheta, \quad x = \xi + \eta\,i.$$

Zunächst ist nun

$$k_0 = k_1 = 2{,}7003925; \quad \varkappa_0 = \varkappa_1 = 0^0;$$
$$k_2 = k_3 = 0{,}7003925; \quad \varkappa_2 = 180^0, \quad \varkappa_3 = -\,180^0.$$

Setzen wir ferner abkürzend $p = 1{,}072197$, $q = 3{,}839497$, also $2\,sin\,\frac{1}{2}\,\beta^2 = 1 \pm pi$, $2\,sin\,\frac{1}{2}\,\gamma^2 = 1 \pm qi$, so wird

$$tang\,\lambda = \pm\,p, \quad l = \frac{1}{cos\,\lambda}; \quad tang\,\mu = \pm\,q, \quad m = \frac{1}{cos\,\mu}.$$

Die Rechnung liefert:

$log\,tang\,\lambda = log(\pm\,p) = 0{,}0302746\,(n)$	$log\,tang\,\mu = log(\pm\,q) = 0{,}5842744\,(n)$
$\lambda = \pm\,46^0\,59'\,43'',53$	$\mu = \pm\,75^0\,24'\,5'',75$
$log\,cos\,\lambda = 9{,}8338205$	$log\,cos\,\mu = 9{,}4014736$
$log\,l = 0{,}1661795$	$log\,m = 0{,}5985264$

	0	1	2	3
$\varkappa$	$0^0\;0'\;0''$	$0^0\;0'\;0''$	$180^0\;0'\;0''$	$-\,180^0\;0'\;0''$
λ	$-\,46\;59\;43{,}53$	$+\,46\;59\;43{,}53$	$-\;46\;59\;43{,}53$	$+\;46\;54\;43{,}53$
μ	$-\,75\;24\;5{,}75$	$+\,75\;24\;5{,}75$	$+\;75\;24\;5{,}75$	$-\;75\;24\;5{,}75$
$2\,\vartheta$	$\mp\,122^0\,23'\,49'',28$		$\pm\,208^0\,24'\,22'',22$	
ϑ	$\mp\;61\;11\;54\;,64$		$\pm\,104\;12\;11\;,11$	
$log\,k$	0,4314269		9,8453414	
$log\,l$	0,1661795		0,1661795	
$log\,m$	0,5985264		0,5985264	
$-\,log\,8$	$-\,0{,}9030900$		$-\,0{,}9030900$	
$2\,log\,R$	0,2930428		9,7069573	
$log\,R$	0,1465214		9,8534786	
$log\,cos\,\vartheta$	9,6828455		9,3898030 n	
$log\,sin\,\vartheta$	9,9426499 (n)		9,9865174 (n)	
$log\,\xi$	9,8293669		9,2432816 n	
$log\,\eta$	0,0891713 (n)		9,8399960 (n)	
x	$0{,}6750982 \mp 1{,}2279234\,i$		$-\,0{,}1750982 \pm 0{,}6918246\,i$	

Zur Probe haben wir

a) $$x_0 + x_1 + x_2 + x_3 = 1.$$

b) $$\Sigma x_0 x_1 = (x_0 + x_1)(x_2 + x_3) + x_0 x_1 + x_2 x_3 = 4 R_0 R_2 \cos\vartheta_0 \cos\vartheta_2 + R_0{}^2 + R_2{}^2 = 4 \xi_0 \xi_2 + R_0{}^2 + R_2{}^2.$$

$\log 4 = 0{,}6020600$	$4\xi_0 \xi_2 = -0{,}4728338$
$\log \xi_0 = 9{,}8293669$	$R_0{}^2 = 1{,}9635538$
$\log \xi_2 = 9{,}2432816\,n$	$R_2{}^2 = 0{,}5092808$
$\log 4\xi_0\xi_2 = 9{,}6747085\,n$	$\Sigma x_0 x_1 = 2{,}0000008$

c) $$\frac{1}{x_0} + \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} = x_0{}^{-1} + x_1{}^{-1} + x_2{}^{-1} + x_3{}^{-1} = \frac{2}{R_0}\cos(-\vartheta_0) + \frac{2}{R_2}\cos(-\vartheta_2) = 2\left(\frac{\cos\vartheta_0}{R_0} + \frac{\cos\vartheta_2}{R_2}\right).$$

$$\log\left(\frac{\cos\vartheta_0}{R_0}\right) = 9{,}5363241; \qquad \log\left(\frac{\cos\vartheta_2}{R_2}\right) = 9{,}5363244\,n.$$

$$\frac{\cos\vartheta_0}{R_0} = -\frac{\cos\vartheta_2}{R_2}; \qquad \Sigma\left(\frac{1}{x}\right) = 0.$$

d) $$x_0 x_1 x_2 x_3 = R_0 R_1 R_2 R_3 \left[\cos(\vartheta_0 + \vartheta_1 + \vartheta_2 + \vartheta_3) + i \sin(\vartheta_0 + \vartheta_1 + \vartheta_2 + \vartheta_3)\right] = R_0{}^2 R_2{}^2 = 1,$$
$$\text{da} \quad 2 \log R_0 + 2 \log R_2 = 0.$$

Demnach sind die Wurzeln endgültig, bis auf eine Unsicherheit in der letzten Dezimalstelle,

10) $$\left\{\begin{aligned} &\left.\begin{matrix} x_0 \\ x_1 \end{matrix}\right\} = 0{,}6750982 \mp 1{,}2279234\,i \\ &\left.\begin{matrix} x_2 \\ x_3 \end{matrix}\right\} = -0{,}1750982 \pm 0{,}6918246\,i. \end{aligned}\right.$$

10. Die Allgemeingültigkeit der Methode. Nach diesen Beispielen darf erwartet werden, dass unsere Auflösung der Normalgleichung allgemeine Gültigkeit hat, wofern statt der Winkelfunktionen Hülfsgrössen eingeführt werden, die durch die nämlichen Gleichungen miteinander verknüpft sind wie jene. Es soll nun auch ein allgemeiner Beweis hierfür versucht werden. Es seien, wie immer, x_0, x_1, x_2, x_3 die Wurzeln der Gleichung

$$x^4 + Ax^3 + Bx^2 + C = 0.$$

Wir setzen

1) $$\left\{\begin{aligned} x_0 &= A\sqrt{\frac{1-z_1}{2}}\sqrt{\frac{1-z_2}{2}}\sqrt{\frac{1-z_3}{2}} = \frac{1}{2}A\sqrt{\frac{1}{2}(1-z_1)(1-z_2)(1-z_3)} \\ x_1 &= -A\sqrt{\frac{1-z_1}{2}}\sqrt{\frac{1+z_2}{2}}\sqrt{\frac{1+z_3}{2}} = -\frac{1}{2}A\sqrt{\frac{1}{2}(1-z_1)(1+z_2)(1+z_3)} \\ x_2 &= -A\sqrt{\frac{1+z_1}{2}}\sqrt{\frac{1-z_2}{2}}\sqrt{\frac{1+z_3}{2}} = -\frac{1}{2}A\sqrt{\frac{1}{2}(1+z_1)(1-z_2)(1+z_3)} \\ x_3 &= -A\sqrt{\frac{1+z_1}{2}}\sqrt{\frac{1+z_2}{2}}\sqrt{\frac{1-z_3}{2}} = -\frac{1}{2}A\sqrt{\frac{1}{2}(1+z_1)(1+z_2)(1-z_3)} \end{aligned}\right.$$

und haben zu verwerten, dass

2) $$\left\{\begin{aligned} &x_0 + x_1 + x_2 + x_3 = -A, \\ &x_0 x_1 + x_0 x_2 + x_0 x_3 + x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3 = B, \\ &x_0 x_1 x_2 + x_0 x_1 x_3 + x_0 x_2 x_3 + x_1 x_2 x_3 = 0, \\ &x_0 x_1 x_2 x_3 = C. \end{aligned}\right.$$

Durch Addition der Gleichungen 1), nachheriges Quadrieren und Zusammenziehen erhält man sehr leicht

3) $$z_1\sqrt{(1-z_2{}^2)(1-z_3{}^2)} + z_2\sqrt{(1-z_3{}^2)(1-z_1{}^2)} + z_3\sqrt{(1-z_1{}^2)(1-z_2{}^2)} - z_1 z_2 z_3 = 1.$$

Wir finden ferner

$$x_0 x_1 = -\frac{1}{8} A^2 (1-z_1) \sqrt{(1-z_2^2)(1-z_3^2)}, \qquad x_2 x_3 = +\frac{1}{8} A^2 (1+z_1) \sqrt{(1-z_2^2)(1-z_3^2)},$$

$$x_0 x_2 = -\frac{1}{8} A^2 (1-z_2) \sqrt{(1-z_3^2)(1-z_1^2)}, \qquad x_1 x_3 = +\frac{1}{8} A^2 (1+z_2) \sqrt{(1-z_3^2)(1-z_1^2)},$$

$$x_0 x_3 = -\frac{1}{8} A^2 (1-z_3) \sqrt{(1-z_1^2)(1-z_2^2)}, \qquad x_1 x_2 = +\frac{1}{8} A^2 (1+z_3) \sqrt{(1-z_1^2)(1-z_2^2)}.$$

Die Summe gibt (nach Multiplikation mit 4 und Division durch A^2)

4) $$z_1 \sqrt{(1-z_2^2)(1-z_3^2)} + z_2 \sqrt{(1-z_3^2)(1-z_1^2)} + z_3 \sqrt{(1-z_1^2)(1-z_2^2)} = \frac{4B}{A^2}.$$

Jetzt bilden wir die Produkte

$$x_0 x_1 x_2 = \quad \frac{1}{8} A^3 \sqrt{(1-z_1)(1-z_2)(1+z_3)} \cdot T,$$

$$x_0 x_1 x_3 = \quad \frac{1}{8} A^3 \sqrt{(1-z_1)(1+z_2)(1-z_3)} \cdot T,$$

$$x_0 x_2 x_3 = \quad \frac{1}{8} A^3 \sqrt{(1+z_1)(1-z_2)(1-z_3)} \cdot T,$$

$$x_1 x_2 x_3 = -\frac{1}{8} A^3 \sqrt{(1+z_1)(1+z_2)(1+z_3)} \cdot T,$$

$$\text{wo} \qquad T = \sqrt{\frac{1}{8}(1-z_1^2)(1-z_2^2)(1-z_3^2)}.$$

Da die Summe $= 0$ ist, so erhalten wir

$$\sqrt{(1+z_1)(1+z_2)(1+z_3)} - \sqrt{(1+z_1)(1-z_2)(1-z_3)} - \sqrt{(1-z_1)(1+z_2)(1-z_3)} - \sqrt{(1-z_1)(1-z_2)(1+z_3)} = 0.$$

Schreiben wir hierfür zur Abkürzung $S - U - V - W = 0$, so können wir folgende Gruppen bilden:

$$S - U = V + W, \qquad S - V = U + W, \qquad S - W = U + V.$$

Quadrieren wir die Gruppen, so bekommen wir schliesslich die Gleichungen

5) $$\begin{cases} \sqrt{(1-z_2^2)(1-z_3^2)} - z_2 z_3 = z_1, \\ \sqrt{(1-z_3^2)(1-z_1^2)} - z_3 z_1 = z_2, \\ \sqrt{(1-z_1^2)(1-z_2^2)} - z_1 z_2 = z_3. \end{cases}$$

Schreiben wir diese Gleichungen in der Form

$$z_2 z_3 \left(\frac{\sqrt{(1-z_2^2)(1-z_3^2)}}{z_2 z_3} - 1 \right) = z_1$$

und multiplizieren sie miteinander, so ergibt sich

6) $$z_1 z_2 z_3 \left(\frac{\sqrt{(1-z_2^2)(1-z_3^2)}}{z_2 z_3} - 1 \right) \left(\frac{\sqrt{(1-z_3^2)(1-z_1^2)}}{z_3 z_1} - 1 \right) \left(\frac{\sqrt{(1-z_1^2)(1-z_2^2)}}{z_1 z_2} - 1 \right) = 1.$$

Endlich gibt die Multiplikation der Gleichungen 1) unmittelbar

7) $$\begin{cases} (1-z_1^2)(1-z_2^2)(1-z_3^2) = -\dfrac{64\,C}{A^4}, \\ \sqrt{(1-z_1^2)(1-z_2^2)(1-z_3^2)} = \dfrac{8\sqrt{-C}}{A^2}. \end{cases}$$

Zunächst folgt nun aus 3) und 4)

8) $$z_1 z_2 z_3 = \frac{4B - A^2}{A^2}.$$

Der Anblick der Gleichungen 3) bis 8) führt ferner wie von selbst zur Einführung der neuen Hülfsgrössen

$$9)\qquad u_1 = \frac{\sqrt{1-z_1^2}}{z_1}, \qquad u_2 = \frac{\sqrt{1-z_2^2}}{z_2}, \qquad u_3 = \frac{\sqrt{1-z_3^2}}{z_3}.$$

Dividieren wir 4) durch 8), bezw. 7) durch 8), so entsteht

$$10)\qquad u_1 u_2 + u_2 u_3 + u_3 u_1 = \frac{4B}{4B-A^2},$$

$$11)\qquad u_1 u_2 u_3 = \frac{8\sqrt{-C}}{4B-A^2}.$$

Die Kombination von 3) und 6) endlich liefert zunächst die Gleichung

$$u_2 u_3 + u_3 u_1 + u_1 u_2 - 1 = (u_2 u_3 - 1)(u_3 u_1 - 1)(u_1 u_2 - 1),$$

und hieraus folgt eine bemerkenswerte Beziehung zwischen den neuen Hülfsgrössen selbst, nämlich

$$12)\qquad u_1 + u_2 + u_3 = u_1 u_2 u_3 .$$

Die Gleichungen 10), 11) und 12) sagen aus, dass u_1, u_2, u_3 die Wurzeln der kubischen Gleichung sind

$$13)\qquad \begin{cases} u^3 - \dfrac{8\sqrt{-C}}{4B-A^2}u^2 + \dfrac{4B}{4B-A^2}u - \dfrac{8\sqrt{-C}}{4B-A^2} = 0, \\ (4B-A^2)u^3 - 8\sqrt{-C}u^2 + 4Bu - 8\sqrt{-C} = 0. \end{cases}$$

Dies ist die gesuchte Hülfsgleichung, die mit der früheren identisch ist.

Es ist demnach folgende Lösung der Gleichung

$$x^4 + Ax^3 + Bx^2 + C = 0$$

allgemein gültig. Zunächst bestimmt man aus Gleichung 13) die Werte der u, hierauf durch Umkehrung der Gleichung 9) in der Form

$$z = \sqrt{\frac{1}{1+u^2}}$$

die Werte der z. Die vier Kombinationen der Vorzeichen von z, die der Bedingung $z_1 z_2 z_3 = \dfrac{4B-A^2}{A^2}$ genügen, liefern dann durch die Gleichung

$$x = \sqrt{\frac{1-z_1}{2}}\sqrt{\frac{1-z_2}{2}}\sqrt{\frac{1-z_3}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}(1-z_1)(1-z_2)(1-z_3)}$$

die gesuchten Wurzeln, wobei die Vorzeichen durch die Bedingung

$$x_0 + x_1 + x_2 + x_3 = -A$$

ermittelt werden. Sind die Wurzeln der Gleichung 13) sämtlich reell, so gehen durch die Substitution $u_1 = tang\,\alpha$ u. s. w. die Wurzeln der Normalgleichung von selbst in die früher zum Ausgangspunkt gewählte Form über. Ein aufmerksamer Beobachter wird übrigens in manchen der vorstehenden Formeln trotz ihres fremden Gewandes schon sofort alte Bekannte aus der Trigonometrie entdeckt haben.

O. Herweg.